**ĐỊNH LÝ CEVA VÀ MENELAUS**

**1. Định lý Menelaus** *(Nhà toán học cổ Hy Lạp, thế kỷ I sau công nguyên)*

Cho tam giác ABC. Các điểm A’, B’, C’ lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB sao cho trong chúng hoặc không có điểm nào, hoặc có đúng 2 điểm thuộc các cạnh của tam giác ABC. Khi đó A’, B’, C’ thẳng hàng khi và chỉ khi 

|  |  |
| --- | --- |
| **Chứng minh**  \* Trường hợp 1: Trong 3 điểm A’, B’, C’ có đúng 2 điểm thuộc cạnh tam giác ABC. Giả sử là B’, C’  Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng B’C’ tại M. |  |
| Ta có: . Vậy  Gọi A’’ là giao của B’C’ với BC.  Áp dụng định lý Menelaus (phần thuận) ta có  mà  nên . Do B’, C’ lần lượt thuộc cạnh CA, AB  nên A’’ nằm ngoài cạnh BC.  Vậy  và A’, A’’ nằm ngoài cạnh BC suy ra . Do đó A’, B’, C’ thẳng hàng .  \* Trường hợp 2: Trong 3 điểm A’, B’, C’ không có điểm thuộc cạnh tam giác ABC được chứng minh tương tự. | |

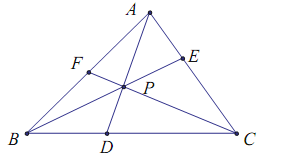
**2. Định lý Ceva** *(Nhà toán học Ý, 1647-1734)*

|  |
| --- |
| Cho tam giác ABC. Các điểm A’, B’, C’ lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó AA’, BB’, CC’ đồng quy khi và chỉ khi .  **Chứng minh**  Qua A kẻ đường thẳng song song  với BC cắt đường thẳng BB’, CC’ tại M, N.  Ta có: .  Vậy ta có |
| Gọi I là giao của BB’ và CC’. Giải sử AI cắt BC tại A’’, suy ra A’’ cũng thuộc BC.  Theo định lý Ceva (phần thuận) ta có  mà  nên . Từ đó suy ra . Do đó AA’, BB’, CC’ đồng quy |

**Định Lý Ceva ( CHUNG)**

Cho tam giác ABC. D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh BC, AC, AB. Chứng minh rằng các mệnh đề sau là tương đương:

* 1. AD,BE,CF đồng quy tại một điểm.
  2. .
  3. .

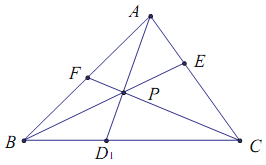
*Chứng minh:*

Chúng ta sẽ chứng minh rằng 1.1 dẫn đến 1.2, 1.2 dẫn đến 1.3, và 1.3 dẫn đến 1.1.

Giả sử 1.1 đúng. Gọi P là giao điểm của AD, BE, CF. Theo định lý hàm số sin trong tam giác APD, ta có:(1)Tương tự, ta cũng có: (2)

(3)

Nhân từng vế của (1), (2), (3) ta được 1.2.

Giả sử 1.2 đúng. Theo định lý hàm số sin trong tam giác ABD và tam giác ACD ta có:Do đó: (4)

Tương tự, ta cũng có:(5)

(6)

Nhân từng vế của (4), (5), (6) ta được 1.3.

Giả sử 1.3 đúng, ta gọi 

Theo 1.1 và 1.2, ta có:  hay: 

Do đó:.

**CÁC BÀI TẬP ÁP DỤNG**

**Bài 1.** Cho ΔABC có trung tuyến AM. Trên AM lấy I sao cho AI = 4MI. Đường thẳng BI cắt AC tại P. Chứng minh rằng: PA = 2PC

|  |  |
| --- | --- |
| **Lời giải.**  Áp dụng định lí Menelaus cho ΔAMC với cát tuyến BIP ta có:  Suy ra:  nên PA = 2PC  *Nhận xét: Việc áp dụng định lí Menelaus cho bài toán này dẫn đến lời giải hay và rất ngắn gọn.* |  |

**Bài 2.** Cho ΔABC. Gọi D là trung điểm của BC, E và F lần lượt là hai điểm nằm trên AB, AC sao cho AD, BF, CE đồng quy. Chứng minh rằng EF // BC

|  |
| --- |
| **Lời giải.**  Áp dụng định lí Ceva cho ΔABC với các đường đồng quy là AD, BF và CE ta có  Vì BD = CD nên  suy ra Vậy theo định lí Ta-lét ta có: EF // BC  *Nhận xét: Trong bài tập trên nếu dùng các*  *dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song*  *thông thường dùng thì rất khó khăn trong chứng minh. Ở đây ta dùng định lí Ceva sẽ dẫn đến tỉ số có lợi là  và áp dụng định lí Ta-let để thu được kết quả hay và ngắn gọn.* |

**Bài 3.** Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của (O) với AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng: Các đường thẳng NP, MQ, BD đồng quy.

|  |  |
| --- | --- |
| **Lời giải.**  Gọi I là giao của QM và BD.  Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABD  với 3 điểm Q, M, I thẳng hàng ta có  mà MA = QA nên suy ra .  Ta có MB = NB, DQ = DP, PC = NC  nên , do đó theo định lý Menelaus thì I, N, P thẳng hàng. |  |

**Bài 4.** Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Qua B kẻ tiếp tuyến d của đường tròn (O). MN là một đường kính thay đổi của đường tròn (M không trùng với A, B). Các đường thẳng AM và AN cắt đường thẳng d lần lượt tại C và D. Gọi I là giao điểm của CO và BM. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E, cắt đường thẳng d tại F. Chứng minh ba điểm C, E, N thẳng hàng.

*(Trích Câu 5.d Đề HSG Phú Thọ 2010-2011)*

|  |  |
| --- | --- |
| **Lời giải.**  Áp dụng định lý Menelaus vào tam giác ACO với ba điểm thẳng hàng là B, I, M ta có:  (1)  Tương tự với tam giác BCO và ba điểm thẳng hàng là A, I, F ta có:  (2) |  |
| Từ (1) và (2) ta có . Do đó MF // AB (định lí Ta lét đảo) mà AB BC  MF BC   Ta có (cùng phụ với góc EAB);  (tứ giác AMEB nội tiếp)   Tứ giác MEFC nội tiếp  . Do đó: ME  EC (3). Lại có (chắn nửa đtròn)  ME  EN (4). Từ (3) và (4) suy ra C, E, N thẳng hàng. | |

**Bài 5.** Cho tam giác nhọn *ABC*, . Gọi *D, E, F* lần lượt là chân đường cao kẻ từ *A, B, C.* Gọi *P* là giao điểm của đường thẳng *BC* và *EF*. Đường thẳng qua *D* song song với *EF* lần lượt cắt các đường thẳng *AB, AC, CF* tại *Q, R, S*. Chứng minh:

a) Tứ giác *BQCR* nội tiếp.

b)  và *D* là trung điểm của *QS*.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác *PQR* đi qua trung điểm của *BC*.

*(Trích Đề thi vào lớp Chuyên Toán, Vĩnh Phúc 2013-2014)*

|  |  |
| --- | --- |
| **Lời giải.**  D  M  P  Q  R  S  E  F  H  A  B  C  a) Do  nên *Q* nằm trên tia đối  của tia *BA* và *R* nằm trong đoạn *CA*,  từ đó *Q*, *C* nằm về cùng một phía của  đường thẳng *BR*.  Do tứ giác *BFEC* nội tiếp nên ,  Do *QR* song song với *EF* nên  Từ đó suy ra  hay tứ giác *BQCR* nội tiếp. |  |
| b) Tam giác *DHB* đồng dạng tam giác *EHA* nên  Tam giác *DHC* đồng dạng tam giác *FHA* nên  Từ hai tỷ số trên ta được  Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác *ABC* với cát tuyến *PEF* ta được:  Từ (1) và (2) ta được  Do *QR* song song với *EF* nên theo định lí Thales .  Kết hợp với (3) ta được  hay *D* là trung điểm của *QS*.  c). Gọi *M* là trung điểm của *BC*. Ta sẽ chứng minh .  Thật vậy, do tứ giác *BQCR* nội tiếp nên  (4).  Tiếp theo ta chứng minh    (đúng theo phần b). Do đó  Từ (4) và (5) ta được  suy ra tứ giác *PQMR* nội tiếp hay đường tròn ngoại tiếp tam giác *PQR* đi qua trung điểm của *BC*. | |

**Bài 6.** Cho tam giác  có  Trên các cạnh  lần lượt lấy các điểm  sao cho  Giả sử đường thẳng đi qua  và trung điểm của đoạn thẳng  cắt đường thẳng  tại 

a) Chứng minh rằng đường thẳng  chia đôi góc 

b) CMR:  *(Trích Đề thi vào lớp Chuyên Tin, Vĩnh Phúc 2011-2012)*

|  |  |
| --- | --- |
| **Lời giải.**  a) Gọi  là trung điểm   là giao điểm  của các đường thẳng  Ta sẽ chứng minh  Áp dụng định lý Ménélaus cho với cát tuyến  ta có: |  |
| Lấy  sao cho DI //AB  Khi đó do hai tam giác  đồng dạng nên Do  cân,  nên  cân, hay  suy ra:  Do  là trung điểm của  nên  do đó  Vậy  điều phải chứng minh.  b) Đặt  Ta sẽ chứng minh  Thật vậy: Trong tam giác  có  suy ra  (1)  Do  th/ hàng nên  và do đó (2)  Từ (1) và (2) suy ra , điều phải chứng minh. | |

**Bài 7.** Cho tam giác ABC, gọi M là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống đường phân giác của góc BCA, N và L lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ A và C xuống đường phân giác của góc ABC. Gọi F là giao của MN và AC, E là giao của BF và CL, D là giao của BL và AC. Chứng minh rằng DE song song với MN

|  |  |
| --- | --- |
| **Lời giải.**  Kéo dài AM cắt BC tại G, kéo dài AN cắt BC  tại I, kéo dài CL cắt AB tại J.  Khi đó AM = MG. AN = NI suy ra MN và BC song song với nhau (1)  Vì AM = MG nên AF = FC.  Gọi H là giao của LF và BC, ta có BH = CH. |  |
| Trong tam giác BLC có BE, LH, CD cắt nhau tại F, theo định lý Ceva ta có . Vì BH = CH nên , suy ra DE // BC (2)  Từ (1) và (2) suy ra MM song song với DE. | |

**Bài 8.** Cho ΔABC lấy E, F, M thứ tự trên cạnh AC, AB sao cho EF//BC, MB = MC. Chứng minh CF, BE , AM đồng quy.

A

F

M

B

C

K

E

|  |  |
| --- | --- |
| **Lời giải.**  *Cách 1*: (Chứng minh đồng quy) Gọi AM ∩ EF = K  Theo định lý Talét ta có: ; ;  và  Suy ra ..= 1  Áp dụng định lý Ceva cho ΔABC ta có CF, BE , AM đồng quy.  *Cách 2:* (Chứng minh thẳng hàng)  E  A  F  M  B  C  N  I  Từ A kẻ đường thẳng // BC cắt BE tại N, AM ∩ BE = I  Ta có =; =2; =  Suy ra ..=.2. =1  Áp dụng định lý Menelaus cho ΔABM thì F, I, C thẳng hàng. Từ đó suy ra CF, BE , AM đồng quy. |  |

**Bài 9.** Cho đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh AD, BE, CF đồng quy.

|  |  |
| --- | --- |
| **Lời giải.**  *Cách 1*: (Chứng minh đồng quy)  Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau:  AF = AE; BF = BD; CE = CD  Suy ra ..=..=1  Áp dụng định lý Ceva cho ΔABC suy ra AD, BE, CF đồng quy.  *Cách 2*: (Chứng minh thẳng hàng)  Từ A kẻ đt song song với BC cắt CF tại N  AD ∩ CF = I. Ta có : | B  C  F  A  E  D  B  C  F  A  E  D  I  N |
| ..=..=.==1  Áp dụng định lí Menelaus cho ΔACD thì AD, BE, CF đồng quy. | |

**Bài 10.** Cho tam giác ABC đường cao AH. Lấy D,E thứ tự trên AB, AC sao cho AH là phân giác góc DHE. Chứng minh: AH, BE, CD đồng quy.

A

B

C

D

M

N

H

E

|  |  |
| --- | --- |
| **Lời giải.**  *Cách 1*: (Chứng minh đồng quy)  Từ A kẻ đt // BC cắt HE, HD tại M và N  Vì HA là phân giác của góc A, HA là đường cao nên AM = AN. Ta có: ;  ⇒  Áp dụng định lý Ceva cho ΔABC suy ra AH, BE, CD đồng quy. |  |
| *Cách 2:* (Chứng minh thẳng hàng)  Từ A kẻ đt // BC cắt HD, HE, BE lần lượt tại M, N, K.  A  B  C  D  M  N  H  E  K  I  Gọi AH ∩ BE = I Ta có: == và  ⇒.== ==1  Áp dụng định lí Menelaus cho ΔABH thì D, I, C  thẳng hàng. Vậy AH, BE, CD đồng quy. | |

**Bài 11.** Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AK. Dựng bên ngoài tam giác những hình vuông ABEF và ACGH. Chứng minh: AK, BG, CE đồng quy.

|  |  |
| --- | --- |
| **Lời giải.**  *Cách 1*: (Chứng minh đồng quy)  H  A  B  G  E  C  K  D  I  F  Gọi D = AB ∩ CE, I = AC ∩ BG  Đặt AB = c, AC = b.  Ta có c2 = BK.BC; b2 = CK.BC  ⇒ = và =; =  (do ΔAIB ~ ΔCIG)  ⇒ ..=..=1  Áp dụng định lý Ceva cho ΔABC thì AK, BG, CE đồng quy |  |
| *Cách 2:* (Chứng minh thẳng hàng)  Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt BG tại M. AK ∩ BG tại O.  H  A  B  G  E  C  K  D  I  F  M  O  Ta có =; = suy ra ..=..  = ..=..=.=1  Áp dụng định lý Menelaus cho ΔABK  thì D, O, C thẳng hàng.  Vậy AK, BG, CE đồng quy |  |